ДЗ 13.12.12

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

при $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = e^{-\frac{1}{x}} \left(-1/x\right)' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

при $x = 0$

$$f'(0) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}$$

полагаме $\frac{1}{h} = y$ и получаваме

при $h \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$

при $h \to 0^- \Rightarrow y \to -\infty$

$$\text{сега } \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{y \to +\infty} y e^{-y} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

$$\left(\text{т.е. } e > 1 \text{ и } y \to +\infty\right)$$

при $h \to 0^- \Rightarrow \lim_{y \to -\infty} -y e^y = -\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-1/x^2\right)' = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' =$$

$$\frac{2(-3)}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad P \in F_{[x]}$$

при $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \Rightarrow \text{полагаме } \frac{1}{x} = y \Rightarrow$$

$$\lim_{y \to \pm\infty} e^{-y^2} y = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} \Rightarrow \text{по Лопитал}$$

$$\frac{1}{e^{y^2} 2y} = 0$$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

по индукция по реда и допускаме че $f^{(n-1)}(0) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} \quad \text{полагаме } \frac{1}{x} = y \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to \pm\infty} \frac{Q(y)}{e^{y^2}} \qquad Q, P \in \mathbb{R}[x]$$

$Q(y)$ има вида $Q(y) = \sum_{k=0}^{p} q_k y^k$ и

получаваме $\lim_{y\to \pm\infty} \frac{y^k}{e^{y^2}} = 0$

По Тейлър $\Rightarrow$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

Изследване за сходимост

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k}} \quad \text{полагаме } u_k = \frac{(-1)^k}{z^{2k}} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \longrightarrow \text{по Даламбер}$$

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k+2}} \cdot \frac{z^{2k}}{(-1)^k} \right| = \frac{1}{|z|^2}$$

Ако $\frac{1}{|z|^2} < 1 \iff |z| > 1$ то редът е сходящ

Ако $|z| < 1$ то редът е разходящ
Ако $|z| = 1 \iff |u_k| = \frac{1}{|z|^{2k}} = \frac{1}{1^{2k}} = 1$

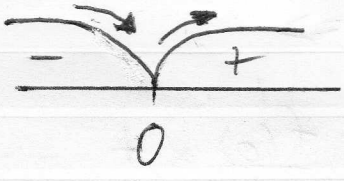
$f(0) = 0$ екстремна стойност (локален минимум)

Да се изследва

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ Ако $f'(x) > 0$ то f расте строго

$f'(x) > 0 \iff x > 0$ - расте
$f'(x) < 0 \iff x < 0$ - намалява



Т Ако f е два пъти диференцируема в интервал то f е изпъкнала